Universidad Rey Juan Carlos
Escuela Técnica Superior Ingeniería Informática

DeduccionNatural.pl:

Herramienta escrita en Prolog para el aprendizaje de la asignatura de Lógica

Joaquín Arias Iván Ramírez Alessandra Gallinari

Grupo de Inteligencia Artificial de la URJC
Center for Intelligent Information Technologies (CETINIA)
Móstoles, Madrid

7 Julio 2023 (JENUI'23)

Objetivo

Demostrar que Lógica es la asignatura más importante

- Permite modelizar (casi) todo y razonar sobre ello:
  - Razonamiento humano: siglo IV a.C., XIII, XVII, etc.
  - Más cosas...
  - Mecánica cuántica: s. XXI.
  - Y quizás otras muchas cosas.

Objetivo

Demostrar que Lógica es la asignatura más importante

- Permite modelizar (casi) todo y razonar sobre ello:
  - Razonamiento humano: siglo IV a.C., XIII, XVII, etc.
  - ... Matemáticas: 1910 a 1930.
  - Mecánica cuántica: s. XXI.
  - Y quizás otras muchas cosas.
- En 1920 Hilbert propone axiomatizar las matemáticas...

Objetivo

Demostrar que Lógica es la asignatura más importante

- Permite modelizar (casi) todo y razonar sobre ello:
  - Razonamiento humano: siglo IV a.C., XIII, XVII, etc.
  - ... Matemáticas: 1910 a 1930.
  - Mecánica cuántica: s. XXI.
  - Y quizás otras muchas cosas.
- En 1920 Hilbert propone axiomatizar las matemáticas...

  ... en 1931 Gödel demuestra que no es posible.

La Lógica tiene limitaciones

Teorema de incompletitud (Gödel, 1931)

Ninguna teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad, es a la vez consistente y completa.

La Lógica tiene limitaciones

Teorema de incompletitud (Gödel, 1931)

Ninguna teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad, es a la vez consistente y completa.

- Si los axiomas de una teoría no se contradicen entre sí (consistencia), entonces existen enunciados que NO se pueden probar ni refutar a partir de ellos (completitud).

La Lógica tiene limitaciones

Teorema de incompletitud (Gödel, 1931)

Ninguna teoría matemática formal capaz de describir los números naturales y la aritmética con suficiente expresividad, es a la vez consistente y completa.

- Si los axiomas de una teoría no se contradicen entre sí (consistencia), entonces existen enunciados que NO se pueden probar ni refutar a partir de ellos (completitud).

Segundo teorema de incompletitud (Gödel, 1931)

Caso particular del primero: Una de las sentencias indecidibles de una teoría es aquella que afirma la consistencia de la misma.

… y por lo tanto la computación también

Respuesta al *Entscheidungsproblem* (Church, 1936)

La lógica de de primer orden no posee un procedimiento de decisión (algoritmo) que permita demostrar que una fórmula cualquiera sea un teorema de dicha lógica. Esta lógica se considera, por tanto, indecidible.

… y por lo tanto la computación también

Respuesta al *Entscheidungsproblem* (Church, 1936)

La lógica de de primer orden no posee un procedimiento de decisión (algoritmo) que permita demostrar que una fórmula cualquiera sea un teorema de dicha lógica. Esta lógica se considera, por tanto, indecidible.

Teorema de la parada (Turing, 1936)

Dada una Máquina de Turing M y una palabra w, determinar si M terminará en un número finito de pasos cuando es ejecutada usando w como dato de entrada, es indecidible.

… y por lo tanto la computación también

Respuesta al *Entscheidungsproblem* (Church, 1936)

La lógica de de primer orden no posee un procedimiento de decisión (algoritmo) que permita demostrar que una fórmula cualquiera sea un teorema de dicha lógica. Esta lógica se considera, por tanto, indecidible.

Teorema de la parada (Turing, 1936)

Dada una Máquina de Turing M y una palabra w, determinar si M terminará en un número finito de pasos cuando es ejecutada usando w como dato de entrada, es indecidible.

- Lógica y Computación son equivalentes: Determinar el problema de parada se reduce a demostrar en LPO la fórmula que expresa la existencia de un output a partir de la aplicación de una serie de instrucciones.

Quien soy

Joaquín Arias
Profesor en la Universidad Rey Juan Carlos (URJC).

- 2020 - hoy: Investigador en Grupo de IA del CETINIA, URJC.
- 2013 - 2020: Investigador en IMDEA Sotware Institute.
- Formación académica:
  - Ph.D. en Computer Science (2020).
  - M.Sc. en Software y Sistemas (2015).
  - B.Sc. en Matemáticas e Informática (2014).
  - M.Arch. en Arquitectura (2002).
- Tesis doctoral: "Advanced Evaluation Techniques for (Non)-Monotonic Reasoning using Rules with Constraints".

Propuesta: DeduccionNatural.pl

Programar demostraciones en deduccion natural

- Usando DeduccionNatural.pl:
  - Programa escrito en Prolog (lenguaje de programación lógico).
  - Se ejecuta directamente en la web.
- Las diez reglas de inferencia propuestas por Gentzen [Arias 2022; Gallinari 2009; Gentzen 1935] son funciones predefinidas.
- Las demostraciones son programas.
- Las reglas derivadas son subrutinas.
- El alumno puede leer el programa (y manipularlo).

[Arias et al. 2023]

Estudiamos lógica proposicional y lógica de primer orden

- Permite representar conocimiento de manera clara y concisa.
- Inferimos nuevo conocimiento a partir de unas premisas:

Todos los hombres son mortales. Sócrates en un hombre. Luego Sócrates es mortal. [Aristóteles s.IV a.C.]

- Un subconjunto de la lógica de primer orden es decidible [Robinson 1965].

Lógica de primer orden:

$$\forall x \; (Hombre(x) \rightarrow Mortal(x))$$
$$\frac{Hombre(socrates)}{Mortal(socrates)}$$

Cláusulas de Horn:

$$Mortal(x) \vee \neg Hombre(x)$$
$$Hombre(socrates)$$
$$\neg Mortal(socrates)$$

Prolog:

```
mortal(X) :- hombre(X).
hombre(socrates).

?- mortal(socrates).
```

Deducción natural de Gentzen I

Introducción de $\wedge$ ($I_\wedge$)

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$T[p, q] \vdash p \wedge q$	
1. p	premisa
2. q	premisa
3. $p \wedge q$	$I_\wedge$ (1,2)

Eliminación de $\wedge$ ($E_\wedge$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$T[p \wedge q] \vdash p$	
1. $p \wedge q$	premisa
2. p	$E_\wedge$ (1)

$T[p \wedge q] \vdash q$	
1. $p \wedge q$	premisa
2. q	$E_\wedge$ (1)

Deducción natural de Gentzen II

Eliminación de $\vee$ ($E_\vee$)

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$$

$T[p \vee q, p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash \neg r$

1.	$p \vee q$	premisa
2.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
3.	$q \rightarrow \neg r$	premisa
4.	$\neg r$	$E_\vee$ (1,2,3)

Introducción de $\vee$ ($I_\vee$)

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

$T[p] \vdash p \vee r$

1.	p	premisa
2.	$p \vee r$	$I_\vee$ (1)

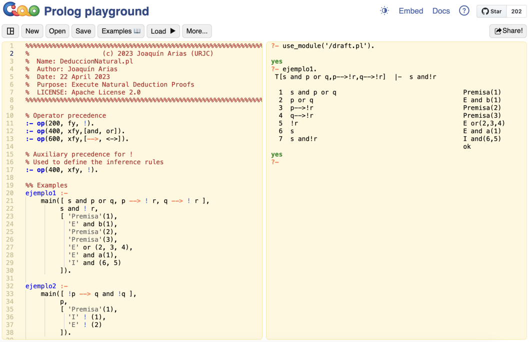
$T[p] \vdash r \vee p$

1.	p	premisa
2.	$r \vee p$	$I_\vee$ (1)

Ejemplo: programar la siguiente demostración

$$T[s \wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$$

1.	$s \wedge (p \vee q)$	*premisa*
2.	$p \vee q$	$E_{\wedge}(1)$
3.	$p \rightarrow \neg r$	*premisa*
4.	$q \rightarrow \neg r$	*premisa*
5.	$\neg r$	$E_{\vee}(2, 3, 4)$
6.	s	$E_{\wedge}(1)$
7.	$s \wedge \neg r$	$I_{\wedge}(5, 6)$



- Demo

Deducción natural de Gentzen III

Introducción ¬ ($I_\neg$)

$$\frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

Eliminación ¬ ($E_\neg$)

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

$T[\neg p \rightarrow q \wedge \neg q] \vdash p$

1. $\neg p \rightarrow q \wedge \neg q$ premisa
2. $\neg\neg p$ **$I_\neg$ (1)**
3. p **$E_\neg$ (2)**

Deducción natural de Gentzen IV

Eliminación $\rightarrow$ ($E_{\rightarrow}$)

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q, p] \vdash q$	
1. $p \rightarrow \neg r$	premisa
2. p	premisa
3. $\neg r$	**$E_{\rightarrow}$ (1,2)**
4. $\neg r \rightarrow q$	premisa
5. q	**$E_{\rightarrow}$ (3,4)**

Introducción $\rightarrow$ ($I_{\rightarrow}$)

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ (supuesto)} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

$T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$	
1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $q \rightarrow r$	premisa
3. p	supuesto
4. q	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5. r	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6. $p \rightarrow r$	**$I_{\rightarrow}$ (3,5)**

Deducción natural de Gentzen V

Introducción $\leftrightarrow$ ($I_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{A \to B \qquad B \to A}{A \leftrightarrow B}$$

$T[p \to \neg r, \neg r \to p] \vdash p \leftrightarrow \neg r$

1.	$p \to \neg r$	premisa
2.	$\neg r \to p$	premisa
3.	$p \leftrightarrow \neg r$	**$I_{\leftrightarrow}$ (1,2)**

Eliminación $\leftrightarrow$ ($E_{\leftrightarrow}$)

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \to B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$$

$T[p \leftrightarrow q \wedge r, p] \vdash r$

1.	$p \leftrightarrow q \wedge r$	premisa
2.	$p \to q \wedge r$	**$E_{\leftrightarrow}$ (1)**
3.	p	premisa
4.	$q \wedge r$	$E_{\to}$ (2,3)
5.	r	$E_{\wedge}$ (4)

Implementar la regla derivada Modus Tollens

$$\frac{A \rightarrow B \quad \neg B}{\neg A} \quad \textit{Modus Tollens (MT)}$$

Implementar la regla derivada Modus Tollens

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ \neg B \end{array}}{\neg A} \quad \textit{Modus Tollens (MT)}$$

- Implementación:

```
rule('MT',                  % Name
      [ FA --> FB,          % Hypotheses
        !FB ],
      !FA,                  % Deduction
      [ 'Premisa'(1),       % Proof
        'Premisa'(2),
        'Supuesto'(FA),
        'E' --> (1,3),
        'I' and (4,2),
        'I' --> (3,5),
        'I' ! (6) ]).
```

Implementar la regla derivada Modus Tollens

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A} \quad \textit{Modus Tollens (MT)}$$

- Implementación:

```
rule('MT',                  % Name
       [ FA --> FB,         % Hypotheses
         !FB ],
       !FA,                 % Deduction
       [ 'Premisa'(1),      % Proof
         'Premisa'(2),
         'Supuesto'(FA),
         'E' --> (1,3),
         'I' and (4,2),
         'I' --> (3,5),
         'I' ! (6) ]).
```

- Demostración:

```
MT: T[A --> B, !B]  |-  !A

1  A --> B           Premisa(1)
2  !B                Premisa(2)
3       A            Supuesto(A)
4       B            E-->(1,3)
5       B and!B      I and(4,2)
6  A --> B and!B     I-->(3,5)
7  !A                I!6
                     ok
```

Ejercicio para casa (sin/con reglas derivadas)

$$T[r \to q \wedge s, \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$$

Conclusiones

- Hemos presentado DeduccionNatural.pl (código abierto, disponible en `https://github.com/Xuaco/DeduccionNatural`):
  - Las demostraciones son programas.
  - Las reglas de inferencia son funciones predefinidas.
  - Las reglas derivadas son subrutinas.
- Experiencia piloto en los grados de Ciberseguridad y en Inteligencia Artificial durante el curso 22/23. ...resultados promotedores

Conclusiones

- Hemos presentado DeduccionNatural.pl (código abierto, disponible en `https://github.com/Xuaco/DeduccionNatural`):
  - Las demostraciones son programas.
  - Las reglas de inferencia son funciones predefinidas.
  - Las reglas derivadas son subrutinas.
- Experiencia piloto en los grados de Ciberseguridad y en Inteligencia Artificial durante el curso 22/23. ...resultados promotedores
- Como trabajo futuro queremos:
  - Mejorar la usabilidad con una nueva interfaz web.
  - Extender la herramienta a lógica de primer orden.
  - Crear un corrector automático de prácticas.

Conclusiones

- Hemos presentado DeduccionNatural.pl (código abierto, disponible en `https://github.com/Xuaco/DeduccionNatural`):
  - Las demostraciones son programas.
  - Las reglas de inferencia son funciones predefinidas.
  - Las reglas derivadas son subrutinas.
- Experiencia piloto en los grados de Ciberseguridad y en Inteligencia Artificial durante el curso 22/23. ...resultados promotedores
- Como trabajo futuro queremos:
  - Mejorar la usabilidad con una nueva interfaz web.
  - Extender la herramienta a lógica de primer orden.
  - Crear un corrector automático de prácticas.

GRACIAS!

Bibliography I

[1] Arias, Joaquín (2022). **Lógica: desde Aristóteles hasta Prolog**. http://hdl.handle.net/10115/20014. Servicio de Publicaciones URJC. ISBN: 978-84-09-38265-1.

[2] Arias, Joaquín, Ramírez, Iván, and Gallinari, Alessandra (2023). **DeduccionNatural.pl: herramienta escrita en Prolog para el aprendizaje de la asignatura de Lógica**. In: *JENUI 2023*.

[3] Gallinari, Alessandra (2009). **Apuntes y problemas de la lógica matemática**. Madrid: Dykinson. ISBN: 978-84-98-49475-4.

[4] Gentzen, Gerhard (1935). **Untersuchungen über das logische schließen. I.** In: *Mathematische Zeitschrift* 35, pp. 176–210.